

УДК 514.517+517.55

М. В. Стефанчук

## Екстремальні елементи в гіперкомплексному просторі

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. Ю. Трохимчуком)*

У роботі досліджуються екстремальні елементи та  $h$ -оболонка множин в  $n$ -вимірному гіперкомплексному просторі  $\mathbb{H}^n$ . Вводиться клас  $\mathbb{H}$ -квазіопуклих множин, які включають в себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів.

**Ключові слова:** гіперкомплексно опукла множина, сильно гіперкомплексно опукла множина,  $h$ -оболонка множини,  $h$ -екстремальна точка,  $h$ -екстремальний промінь,  $\mathbb{H}$ -квазіопукла множина.

Дана робота присвячена дослідженню екстремальних елементів та  $h$ -оболонки множини в гіперкомплексному просторі, а також побудові класу гіперкомплексно опуклих множин, які включають в себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів. Такі множини будемо називати  $\mathbb{H}$ -квазіопуклими.

Будемо розглядати  $n$ -вимірний гіперкомплексний простір  $\mathbb{H}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , який є прямим добутком  $n$ -копій тіла кватерніонів  $\mathbb{H}$ . Нехай  $E \subset \mathbb{H}$  – довільна множина, яка містить початок координат  $O = \{0, 0, \dots, 0\}$ . Покладемо  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ ,  $\langle x, h \rangle = x_1 h_1 + x_2 h_2 + \dots + x_n h_n$ . Множина  $E^* = \{h | \langle h, x \rangle \neq 1 \forall x \in E\}$  називається *спряженою* множиною до множини  $E$ . [7]

**Означення 1.** Множина  $E \subset \mathbb{H}^n$  називається *гіперкомплексно опуклою*, якщо для довільної точки  $x_0 \in \mathbb{H}^n \setminus E$  існує гіперплощина, яка проходить через точку  $x_0$  і не перетинає  $E$ . [7]

Нагадаємо, що оскільки в алгебрі кватерніонів множення некомутативне, то надалі розглядатимемо праві гіперплощини, тобто точку зі змінною координатою множимо на фіксовану точку справа.

**Означення 2.** Множина  $E \subset \mathbb{H}^n$  називається *сильно гіперкомплексно опуклою*, якщо довільний її перетин гіперкомплексною прямою  $\gamma$  ациклічний, тобто  $\tilde{H}^i(\gamma \cap E) = 0, \forall i$ , де  $\tilde{H}^i(\gamma \cap E)$  – зведена група когомологій Александрова-Чеха множини  $\gamma \cap E$  з коефіцієнтами в групі цілих чисел. [7]

У [8] доведено, що сильно гіперкомплексно опуклі компакти будуть гіперкомплексно опуклими.

Нехай  $E \subset \mathbb{H}$  – довільна множина. Доповнення до об'єднання необмеже-

них компонент множини  $\mathbb{H} \setminus E$  називається  $h$ -комбінацією точок множини  $E$  та позначається  $[E]$ . Якщо  $E$  – довільна множина в просторі  $\mathbb{H}^n, n > 1$ , то скажемо, що точка  $x$  належить  $h$ -комбінації точок з  $E$ , якщо існує перетин множини  $E$  гіперкомплексною прямою  $\gamma$  такий, що  $x \in [E \cap \gamma]$ . Множину таких точок з  $\mathbb{H}^n$  називають  $h$ -комбінацією точок  $E$  і позначають  $[E]$ ;  $m$ -кратну  $h$ -комбінацію визначають за індукцією  $[E]^m = [[E]^{m-1}]$ . [3]

**Означення 3.**  $h$ -оболонкою множини  $E \subset \mathbb{H}^n$  називається множина  $\hat{E} = \bigcap_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)]$ , де  $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \lambda$  – всеможливі лінійні проекції множини на гіперкомплексні прямі,  $[\pi(E)]$  –  $h$ -комбінація точок множини  $\pi(E)$ , а  $\pi^{-1}[\pi(E)] = \{x \in \mathbb{H}^n | \pi(x) \in \pi(E)\}$  – її повний прообраз. [3], [7]

Наступна теорема стверджує, що для довільної множини множина точок її  $h$ -оболонки співпадає з  $h$ -комбінацією точок цієї множини.

**Теорема 1.** Якщо множина  $E \in h$ -оболонкою, то  $E = [E]$ .

*Доведення.* Нехай  $x \in [\lambda \cap E]$  для деякої гіперкомплексної прямої  $\lambda$ . Тоді очевидно буде виконуватися включення  $\pi(x) \in [\pi(\lambda \cap E)]$  для всіх проекцій  $\pi$ , тому що обмеження будь-якої проекції  $\pi$  на кожену пряму є або гомеоморфізмом, або проекцією в точку.

Дослідимо більш детально процедуру утворення  $h$ -оболонки множини  $E$ . За властивістю 19 гіперкомплексно опуклих множин [7] множина  $[\pi(E)]$  гомеоморфна доповненню в  $\mathbb{H}^o = \lambda^o$  ( $\mathbb{H}^o$  – одноточкова компактифікація прямої) до зв'язної компоненти, що містить початок координат, деякого перерізу  $\lambda \cap E^*$ , де  $\lambda$  – гіперкомплексна пряма, а  $E^*$  – множина, спряжена до множини  $E$ . Позначимо цю компоненту  $]\lambda \cap E^*[$ . Крім цього дану компоненту можна зобразити ще й так  $(\pi^{-1}[\pi(E)])^*$ . Взагалі кажучи, об'єднання  $\bigcup_{\lambda} \lambda \cap E^*$  може не бути гіперкомплексно опуклою множиною. Однак за властивостями 9 та 15 гіперкомплексно опуклих множин [7] справедливі наступні рівності

$$\left(\bigcup_{\pi} (\pi^{-1}[\pi(E)])^*\right)^* = \bigcap_{\pi} (\pi^{-1}[\pi(E)])^{**} = \bigcap_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)] = \hat{E}.$$

Звідси впливає наступна теорема, яка дає ще один спосіб побудови  $h$ -оболонки.

**Теорема 2.** Для довільної множини  $E \subset \mathbb{H}^n$  її  $h$ -оболонку можна зобразити у вигляді  $\hat{E} = \left(\bigcup_{\lambda} \lambda \cap E^*\right)^*$ .

Доведення впливає з виконання рівності

$$\hat{E} = \left(\bigcup_{\pi} (\pi^{-1}[\pi(E)])^*\right)^* = \left(\bigcup_{\lambda} \lambda \cap E^*\right)^*.$$

Варто відмітити, що спряжена множина до  $h$ -оболонки не завжди буде  $h$ -оболонкою. Розглянемо наступний приклад.

**Приклад 1.** Нехай  $K$  – компакт, який лежить у тривимірному евклідовому просторі  $\mathbb{R}^3 = \{(y_1, z_1, y_2) | x_1 = y_1 + iz_1 + ju_1 + kt_1, x_2 = y_2 + iz_2 + ju_2 + kt_2, (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2\}$ ,  $K = \{(y_1, z_1, y_2) | (y_1 - |z_1| = 0, 0 \leq y_1 \leq 1) \wedge [(y_2 = y_1) \vee (y_2 = -2y_1 + 3), z_1 \leq 0] \vee [(y_2 = 2y_1) \vee (y_2 = -y_1 + 3), z_1 > 0]\}$ .

Тоді при канонічній проекції  $\pi_1(K)$  на пряму  $x_2 = 0$  отримаємо ациклічний компакт  $K_1 = \{(y_1, z_1, 0, 0) | y_1 - |z_1| = 0, 0 \leq y_1 \leq 1\}$ , а при проекції  $\pi_2(K)$  на пряму  $x_2$ , паралельно прямій, яка проходить через точки  $(1 - i, 1)$ ,  $(1 + i, 2)$ , отримаємо компакт  $\pi_1(K) = K_2$ , який складається з двох відрізків, оскільки відрізки  $[y_1 = -z_1, 0 \leq y_1 \leq 1, y_2 = y_1] \cap \mathbb{R}^3$  і  $[y_1 = z_1, 0 \leq y_1 \leq 1, y_2 = 2y_1] \cap \mathbb{R}^3$ ,  $[y_1 = -z_1, 0 \leq y_1 \leq 1, y_2 = -2y_1 + 3] \cap \mathbb{R}^3$  і  $[y_1 = z_1, 0 \leq y_1 \leq 1, y_2 = -y_1 + 3] \cap \mathbb{R}^3$  попарно ототожнюються при цій проекції. Тому  $[K_1] = K_1$  і  $[K_2] = K_2$ . Легко бачити, що  $K = \pi_1^{-1}(K_1) \cap \pi_2^{-1}(K_2)$ . При всіх інших проекціях образ  $\pi(K)$  буде ненульовим одновимірним циклом. Тому  $\pi(K) \neq [\pi(K)]$  при  $\pi \neq \pi_1$  або  $\pi \neq \pi_2$ . Але  $\hat{K} = \bigcap_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)] \subset \pi_1^{-1}(K_1) \cap \pi_2^{-1}(K_2) = K$ . Отже,  $\hat{K} = K$ . Однак, взагалі кажучи,  $\pi(\hat{K}) \neq [\pi(K)]$ .

За теоремою 2  $\hat{K} = (\bigcup_{\gamma} \gamma \cap K^*)^* = (K_3)^*$ , де  $K_3 = \{(y_1, z_1, y_2) | y_1 - |z_1| = 0, 0 \leq y_1 \leq 1, (y_2 = y_1) \vee (y_2 = -2y_1 + 3)\}$  – частина компакта  $K$ , що складається з двох відрізків.

З леми 1, яка є аналогом теореми Каратеодорі, враховуючи, що жодна  $h$ -екстремальна точка не може бути отримана  $h$ -комбінацією інших точок компакта  $K$ , випливають наступні наслідки.

**Лема 1.**  $h$ -оболонка гіперкомплексно опуклого компакта в  $\mathbb{H}^n$  співпадає з сукупністю не більше, ніж  $n$ -кратних комбінацій своїх  $h$ -екстремальних точок. [3]

**Наслідок 1.** Якщо  $K \subset \mathbb{H}^n$  – компакт і  $\hat{K}$  – його  $h$ -оболонка, яка співпадає з  $h$ -комбінацією  $[K]^m$ , то кожна  $h$ -екстремальна точка множини  $\hat{K}$  належить  $K$ .

**Наслідок 2.** Довільну точку простору  $\mathbb{H}^n$ , яка належить  $h$ -оболонці  $\hat{K} = [K]^m$ , можна зобразити у вигляді не більше, ніж  $n$ -кратної комбінації точок компакта  $K$ .

**Наслідок 3.** Для того, щоб  $h$ -оболонка гіперкомплексно опуклого компакта  $K$  співпадала з ним, необхідно, щоб всі перерізи його гіперкомплексними прямими  $\gamma$  не містили тривимірних коциклів, тобто  $H^3(K \cap \gamma) = 0$ .

**Наслідок 4.** Для того, щоб  $h$ -оболонка гіперкомплексно опуклого компакта  $K$  співпадала з ним, необхідно, щоб усі проекції його спряженої множини  $K^*$  на гіперкомплексні прямі були зв'язними.

Останній наслідок отримується з попереднього, використовуючи властиво-

сті 19 та 20 гіперкомплексно опуклих множин [7].

**Приклад 2.** Нехай  $S_+^4 \subset \mathbb{R}^5 \subset \mathbb{H}^2$  – півсфера у п’ятивимірному дійсному евклідовому просторі  $\mathbb{R}^5 = \{(y_1, z_1, u_1, t_1, y_2) | x_1 = y_1 + iz_1 + ju_1 + kt_1, x_2 = y_2 + iz_2 + ju_2 + kt_2, (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2\}$ ,  $S_+^4 = \{(y_1, z_1, u_1, t_1, y_2) | y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + t_1^2 + y_2^2 = 1, z_1 \geq 0\}$ . Легко бачити, що  $(S_+^4)^{**} = K_+ = \{(y_1, z_1, u_1, t_1, y_2) | y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + t_1^2 + y_2^2 \leq 1, z_1 \geq 0\}$  і  $K_+$  – опуклий компакт, який співпадає зі своєю  $h$ -оболонкою. Довільний перетин  $S_+^4$  гіперкомплексною прямою співпадає з перетином  $S_+^4$  дійсною прямою або дійсною чотирьохвимірною площиною виду  $y_2 = \text{const}$  в  $\mathbb{R}^5$ . Всі такі перетини не містять тривимірних циклів. Тому  $[S_+^4] = S_+^4 \neq K_+$ .

Цей приклад показує, що лему 1 та її наслідки не завжди можна застосовувати до гіперкомплексно неопуклих компактів.

Розповсюдимо теорему Клі опуклого аналізу [5] на гіперкомплексний випадок.

**Означення 4.**  $h$ -інтервалом з центром в точці  $x$  радіуса  $r$  називається перетин відкритої кулі радіуса  $r$  з центром в точці  $x$  з гіперкомплексною прямою, яка проходить через точку  $x$ . [7]

**Означення 5.** Точка  $x \in E \subset \mathbb{H}^n$  називається  $h$ -екстремальною точкою множини  $E$ , якщо в  $E$  немає жодного  $h$ -інтервалу, який містить  $x$ . [7]

**Означення 6.**  $h$ -променем назвемо замкнену необмежену ациклічну підмножину гіперкомплексної прямої з непорожньою межею.

**Означення 7.** Екстремальним  $h$ -променем множини  $E \subset \mathbb{H}^n$  назвемо  $h$ -промінь  $H$ , який належить множині  $E$ , якщо множина  $E \setminus H$  гіперкомплексно опукла та кожна точка межі променя  $H$  буде  $h$ -екстремальною точкою для множини  $E$ . (Це еквівалентне тому, що жодна точка променя  $H$  не буде внутрішньою для довільного  $h$ -інтервалу, який належить множині  $E$  та має хоча б одну точку за межами  $H$ .)

Для множини  $E \subset \mathbb{H}^n$  позначимо:  $\text{hex} E$  – множину її  $h$ -екстремальних точок,  $\text{rhex} E$  – множину  $h$ -екстремальних променів,  $\text{hconv} E$  –  $h$ -оболонку  $E$ .

**Лема 2.** Нехай  $E \subset \mathbb{H}^n$  – замкнене сильно гіперкомплексно опукле тіло (тобто  $\text{int} E \neq \emptyset$ ) з непорожньою сильно гіперкомплексно опуклою межею  $\partial F$ , тоді  $E$  має вигляд  $E = E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$ , де  $E_1$  – ациклічна підмножина прямої  $\mathbb{H}$  з непорожньою внутрішністю відносно цієї прямої.

*Доведення.* Оскільки межа  $\partial F$  – сильно гіперкомплексно опукла, то для довільної точки  $x \in \text{int} E$  існує гіперплощина, яка не перетинає  $\partial F$ . Тому множина  $E$  містить гіперплощину. Отже, за теоремою 3 [3] множину  $E$  можна зобразити у вигляді декартового добутку  $E = E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$ . Множина  $E_1$  буде ациклічною, тому що існують перетини  $E$  гіперкомплексними прямими, які

гомеоморфні  $E_1$ .

**Означення 8.** Афінна підмножина  $L$  називається *дотичною* до множини  $E$ , якщо  $L \cap \overline{E} \subset \partial E$ ,  $L \cap \overline{E} \neq \emptyset$ .

**Лема 3.** Якщо  $E \subset \mathbb{H}^n$  – сильно гіперкомплексно опукла замкнена множина та  $L$  – її дотична гіперкомплексна пряма, то  $\text{hext}(E \cap L) = (\text{hext}E) \cap L$ .

*Доведення.* Оскільки справедливе включення множин  $E \cap L \subset E$ , то за означенням  $h$ -екстремальних точок маємо  $\text{hext}(E \cap L) \supset (\text{hext}E) \cap L$ . Нехай точка  $x \in \text{hext}(E \cap L)$ . Тоді не може виконуватися включення  $x \in [K] \setminus K$ , де  $K \subset E$ , бо інакше було б  $K \subset E \cap L$  (тому що  $x \in L$  та  $L$  є гіперкомплексною прямою, дотичною до  $E$ ). А це суперечить тому, що  $x \in \text{hext}(E \cap L)$ . Отже, вірне обернене включення  $\text{hext}(E \cap L) \subset (\text{hext}E) \cap L$  та лема доведена.

*Зауваження 1.* Аналогічно доводиться рівність  $\text{rhext}(E \cap L) = (\text{rhext}E) \cap L$  для  $h$ -екстремальних променів.

**Теорема 3.** Кожна замкнена сильно гіперкомплексно опукла множина  $E \subset \mathbb{H}^n$ , яка не містить гіперкомплексної прямої, буде  $h$ -оболонкою своїх  $h$ -екстремальних точок та  $h$ -екстремальних променів  $E = \text{hconv}(\text{hext}E \cup \text{rhext}E)$ .

*Доведення.* Доведення проведемо індукцією згідно гіперкомплексної розмірності множини  $E$ . При  $\dim_{\mathbb{H}} E = 0$  та  $\dim_{\mathbb{H}} E = 1$  теорема очевидна. Припустимо, що теорема правильна при всіх гіперкомплексних розмірностях множини  $E$ , які менші  $m$  ( $1 < m \leq n$ ). Доведемо її при для  $\dim_{\mathbb{H}} E = m$ .

За умовою теореми множина  $E$  не містить гіперкомплексної прямої, тому не може співпадати ні з її афінною оболонкою, ні з декартовим добутком  $E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$ . Тому з леми 2 випливає, що непорожня межа  $\partial E$  не буде сильно гіперкомплексно опуклою множиною.

За означенням сильної гіперкомплексної опуклості перетин множини  $E$  довільною гіперкомплексною прямою буде також сильно гіперкомплексно опуклим. Нехай  $x$  – довільна точка множини  $E$ . Якщо  $x$  належить якійсь дотичній прямій  $L$  до  $E$ , то за припущенням індукції маємо включення  $x \in \text{hconv}((\text{hext}E \cap L) \cup \text{rhext}(E \cap L))$ . Якщо ж існують точки множини  $E$ , через які не проходить жодна дотична до  $E$  гіперкомплексна пряма, тоді знайдеться точка  $x \in \text{int}E$ .

У цьому випадку через точку  $x$  проведемо гіперкомплексну пряму  $l$ . Перетин  $l \cap E$  є сильно гіперкомплексно опуклою множиною та не співпадає з  $l$ . Тому  $x \notin [\partial(l \cap E)]$ . Нехай тепер  $y$  – довільна точка межі перетину  $\partial(l \cap E)$ . Згідно сильної гіперкомплексної опуклості, через точку  $y$  можна провести дотичну до множини  $E$  пряму  $T$ . За припущенням індукції отримаємо включення  $y \in \text{hconv}((\text{hext}E \cap T) \cup \text{rhext}(E \cap T))$ . Зауважимо, що

це виконується для кожної точки  $y \in \partial(l \cap E)$ . Тоді, враховуючи лему 3 та зауваження 2, отримаємо  $x \in \text{hconv}(\text{hext}E \cup \text{rhext}E)$ . В силу довільності вибору точки  $x \in E \subset \text{hconv}(\text{hext}E \cup \text{rhext}E)$ . Обернене включення тривіальне. Теорема доведена.

Клас сильно гіперкомплексно опуклих множин є незамкненим відносно перетинів. Тому для нього не виконується основна аксіома опуклості – перетин будь-якої кількості опуклих множин повинен бути опуклим. Означимо клас множин, який включає в себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненим відносно перетинів.

**Означення 9.** Гіперкомплексно опуклу множину  $E \subset \mathbb{H}^n$  назовемо  $\mathbb{H}$ -квазіопуклою множиною, якщо її перетин довільною гіперкомплексною прямою  $\gamma$  не містить тривимірного коциклу, тобто  $H^3(\gamma \cap E) = 0$ .

Очевидно, що клас  $\mathbb{H}$ -квазіопуклих множин включає в себе сильно гіперкомплексно опуклі області та компакти.

Покажемо замкненість класу  $\mathbb{H}$ -квазіопуклих множин в тому сенсі, що перетин довільної сім'ї компактних  $\mathbb{H}$ -квазіопуклих множин буде  $\mathbb{H}$ -квазіопуклою множиною.

**Теорема 4.** Перетин довільної сім'ї  $\mathbb{H}$ -квазіопуклих компактів буде  $\mathbb{H}$ -квазіопуклим компактом.

*Доведення.* Доведення достатньо провести для двох компактів. Нехай  $K_1, K_2$  – два довільні  $\mathbb{H}$ -квазіопуклі компакти,  $\gamma$  – довільна гіперкомплексна пряма, яка перетинає множину  $K_1 \cap K_2$ . Використаємо точну кохомологічну послідовність Майєра-В'єторіса

$$H^3(\gamma \cap K_1) \oplus H^3(\gamma \cap K_2) \rightarrow H^3(\gamma \cap K_1 \cap K_2) \rightarrow H^4(\gamma \cap (K_1 \cup K_2)).$$

Оскільки компакти  $K_1$  та  $K_2$   $\mathbb{H}$ -квазіопуклі, то  $H^3(\gamma \cap K_1) = 0$  та  $H^3(\gamma \cap K_2) = 0$ . Тому  $H^3(\gamma \cap K_1) \oplus H^3(\gamma \cap K_2) = 0$ .

З іншого боку, компактний перетин  $\gamma \cap (K_1 \cup K_2) = (\gamma \cap K_1) \cup (\gamma \cap K_2)$  не може містити всю гіперкомплексну пряму  $\gamma$ , яка є чотиривимірним дійсним многовидом, тому  $H^4(\gamma \cap (K_1 \cup K_2)) = 0$ .

З точності кохомологічної послідовності випливає, що  $H^3(\gamma \cap K_1 \cap K_2) = 0$ . Це еквівалентне тому, що перетин множини  $K_1 \cap K_2$  довільною гіперкомплексною прямою не містить тривимірного коциклу. Звідси випливає  $\mathbb{H}$ -квазіопуклість компакта  $K_1 \cap K_2$ . Теорема доведена.

**Лема 4.** Якщо всі співмножники  $E_j, j = 1, \dots, n$ , ациклічні, то довільний перетин множини  $E = E_1 \times \dots \times E_n \subset \mathbb{H}^n$  не містить тривимірного коциклу.

*Доведення.* Доведення проведемо для випадку, коли  $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{H}^2$  та гіперкомплексна пряма  $\gamma$  проходить через початок координат. Цього завжди

можна досягти заміною координат. Рівняння прямої має вигляд

$$\gamma = \{x | x_1 = k_1 x_2, x_3 = \dots = x_n = 0, k = -\frac{r_1}{r_2}, r_i = |x_i|, i = 1, 2\}.$$

Оскільки в прямій  $\gamma$  координати  $x_1, x_2$  пов'язані між собою співвідношеннями  $x_1 = kx_2$ , а множини  $E_2$  та  $kE_2, k \neq 0$  гомеоморфні між собою, то перетин  $\gamma \cap E$  співпадає з  $E_1 \cap kE_2$ .

З точності когомологічної послідовності Майєра-В'єторіса

$$H^3(E_1) \oplus H^3(kE_2) \rightarrow H^3(E_1 \cap kE_2) \rightarrow H^4(E_1 \cup kE_2),$$

оскільки  $H^3(E_1) \oplus H^3(kE_2) = 0$  та  $H^4(E_1 \cup kE_2) = 0$ , отримуємо, що  $H^3(E_1 \cap kE_2) = 0$ . Лема доведена.

З леми 4 фактично випливає, що декартовий добуток  $\mathbb{H}$ -квазіопуклих компактів буде  $\mathbb{H}$ -квазіопуклою множиною.

**Означення 10.** *Лінійним поліедром* називається множина виду  $E = \{x | f_j(x) \in E_j, j \in J = \{1, 2, \dots, N\}\}$ , де  $E_j \subset \mathbb{H}^1$ ,  $f_j(x) = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k$ , причому довільні дві функції  $f_k(x), f_j(x), k \neq j$ , є лінійно незалежними, а кожна з функцій  $f_j$  відображає  $E$  в підмножину гіперкомплексної прямої  $E_j$ . [3]

Оскільки довільний компактний лінійний поліедр можна зобразити у вигляді перетину не більше, ніж  $n$ , ( $n$  – скінченне число і позначає кількість граней поліедра) декартових добутків  $\Gamma_i \times K_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , множини  $\Gamma_i$  де  $\Gamma_i$  – грань поліедра, на кулю  $K_i$  досить великого радіуса в  $(n - 1)$ -вимірній гіперкомплексній гіперплощині, яка ортогональна до грані  $\Gamma_i$ , то з теореми 4 отримуємо наступне твердження.

**Теорема 5.** Компактний лінійний поліедр, всі грані якого не містять трьохвимірних циклів, є  $\mathbb{H}$ -квазіопуклою множиною.

**Наслідок 5.** Перетин сильно гіперкомплексно опуклих компактів буде  $\mathbb{H}$ -квазіопуклою множиною.

*Зауваження 2.* У роботі [8] доведено, що гіперкомплексно опукла область з гладкою межею буде  $\mathbb{H}$ -квазіопуклою множиною.

**Теорема 6.** Кожен ациклічний в розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт  $E$  буде  $\mathbb{H}$ -квазіопуклим.

*Доведення.* Розглянемо перетин множини  $E$  гіперкомплексною прямою  $\gamma$ . Нехай перетин  $\gamma \cap E$  містить негомологічний нулю тривимірний цикл  $Z$ . Візьмемо точку  $x_0 \in \gamma \setminus \gamma \cap E$ , зачеплену з циклом  $Z$ . Оскільки множина  $E$  гіперкомплексно опукла, то існує гіперкомплексна гіперплощина  $L$ , яка проходить через точку  $x_0$  і не перетинає  $E$ . Тоді  $(4n - 4)$ -вимірний цикл  $K = L \cup \infty$  зачеплений з трьохвимірним циклом  $Z$ . Оскільки множина  $E$  однозв'язна, то цикл  $Z$  гомологічний нулю в  $E$ . Тоді існує ланцюг  $C$  в  $E$ ,

який обмежується циклом  $Z$ . За теоремою про зачеплення  $C \cap K \neq \emptyset$ , що суперечить тому, що множина  $K \cap E$  порожня. Теорема доведена.

## Література

- [1] *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы. — К. : Ин-т математики НАН України, 2012. — 280 с.
- [2] *Зелинский Ю. Б.* О многозначных линейно выпуклых функциях // Комплексный анализ, алгебра и топология. — 1990. — К.: Ин-т математик АН УССР. — С. 52 – 61.
- [3] *Зелинский Ю. Б., Мкртчян Г. А.* Об экстремальных точках и гиперкомплексно выпуклых областях // Докл. АН СССР. — 1990. — **311**, № 6. — С. 1299-1302.
- [4] *Кантор И. Л., Солодовников А. С.* Гиперкомплексные числа. — М. : Наука, 1973. — 144 с.
- [5] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества: Пер. с нем. — М.: Наука, 1985. — 336 с.
- [6] *Мкртчян Г. А.* О гиперкомплексной выпуклости // V Тираспол. симпоз. по общ. топологии. — Кишинев : Штиинца, 1985. — С. 177.
- [7] *Мкртчян Г. А.* О гиперкомплексно выпуклых множествах. — Киев: ИМ АН УССР, 1987. — 17 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 87.42)
- [8] *Мкртчян Г. А.* О сильной гиперкомплексной выпуклости // Укр. мат. журн. — **42**, № 2. — С. 182-187.
- [9] *Спенсер Э.* Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971. — 680 с.

## Література

- [1] *Zelinskii Yu. B.* Convexity. Selected chapters. — K. : Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 2012. — 280 p.
- [2] *Zelinskii Yu. B.* On multivalued linear convex functions // Complex analysis, algebra and topology. — 1990. — K.: Institute of Mathematics Acad. Sci. USSR. — P. 52 – 61.
- [3] *Zelinskii Yu. B., Mkrtchyan G. A.* On extremal points and hypercomplex convex domains // Dokl. Acad. Nauk SSSR. — 1990. — **311**, № 6. — P. 1299-1302.



- [4] *Kantor I. L., Solodovnikov A. S.* Hypercomplex numbers — M. : Nauka, 1973. — 144 p.
- [5] *Leyhtveys K.* Convex sets: Transl. from German. — M.: Nauka, 1985. — 336 p.
- [6] *Mkrtchyan G. A.* On hypercomplex convexity // V Tiraspol workshop on general topology. — Kishinev: Shtiintsa, 1985. — P. 177.
- [7] *Mkrtchyan G. A.* On hypercomplex convex sets. — Kiev: IM Acad. Sci. USSR, 1987. — 17 p. — (Preprint / Acad. Sci. USSR, Institute of Mathematics; 87.42)
- [8] *Mkrtchyan G. A.* On strong hypercomplex convexity // Ukr. Mat. Jh. — **42**, № 2. — P. 182-187.
- [9] *Spener E.* Algebraic topology. — M.: Mir, 1971. — 680 p.

**М. В. Стефанчук**

### **Экстремальные элементы в гиперкомплексном пространстве**

В работе исследуются экстремальные элементы и  $h$ -оболочка множеств в  $n$ -мерном гиперкомплексном пространстве  $\mathbb{H}^n$ . Вводится класс  $\mathbb{H}$ -квазивыпуклых множеств, которые включают в себя сильно гиперкомплексно выпуклые множества и являются замкнутыми относительно пересечений.

**Ключевые слова:** гиперкомплексно выпуклое множество, сильно гиперкомплексно выпуклое множество,  $h$ -оболочка множества,  $h$ -экстремальная точка,  $h$ -экстремальный луч,  $\mathbb{H}$ -квазивыпуклое множество.

**M. V. Stefanchuk**

### **Extremal elements in hypercomplex space**

Extremal elements and a  $h$ -hull of sets in the  $n$ -dimensional hypercomplex space  $\mathbb{H}^n$  are investigated. Introduced a class of  $\mathbb{H}$ -quasiconvex sets including strongly hypercomplex convex sets and being closed with respect to intersections.

**Keywords:** hypercomplex convex set, strongly hypercomplex convex set,  $h$ -shell of a set,  $h$ -extremal point,  $h$ -extremal beam,  $\mathbb{H}$ -quasiconvex set.

Інститут математики НАН України, Київ

Адреса: 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3.

Автор: Стефанчук Марія Володимирівна

e-mail: stefanmv43@gmail.com